# Vjerojatnost i statistika u Texas hold'em pokeru

**Krevzelj, Katarina**

**LIBERTAS MEĐUNARODNO SVEUČILIŠTE**

**ZAGREB**

**KATARINA KREVZELJ**

**ZAVRŠNI RAD**

# VJEROJATNOST I STATISTIKA U TEXAS HOLD'EM POKERU

**Zagreb, listopad 2021.**

**LIBERTAS MEĐUNARODNO SVEUČILIŠTE**

**ZAGREB**

**PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ**

**POSLOVNA EKONOMIJA**

# VJEROJATNOST I STATISTIKA U TEXAS HOLD'EM POKERU

**KANDIDAT: Katarina Krevzelj**

**KOLEGIJ: Osnove statistike**

**MENTOR: mr.sc. Milan Papić**

**Zagreb, listopad 2021.**

SADRŽAJ

## 1. UVOD

Poker je zajednički naziv za stotine inačica kartaških igara iz te skupine. Texas Hold'em Poker jedna je od najpopularnijih verzija pokera, a zadnjih godina ostvaruje još veću popularnost kako u kasinima tako i na online platformama. (Falleta & Woodcock, 2018)

Jednostavno rečeno, u Texas Hold'em Pokeru pobjedu odnosi onaj igrač čija je kombinacija karata jača od protivničkih kombinacija. Iako igrači na početku igre počinju s jednakim šansama, svojim će odlukama, kao što su odustajanje, stavljanje, povisivanje ili praćenje uloga, utjecati na konačan ishod igre. Faktor sreće je, dakako, prisutan, ali zahvaljujući vještini igrači boljim odlučivanjem mogu ostvariti prednost u složenim situacijama. Kao i u ostalim sportovima, igrači s boljim matematičkim šansama, dakako, mogu izgubiti partiju, ali dobre matematičke šanse u kombinaciji s dobrom vještinom na kraju će rezultirati pobjedom igrača. Može se reći da je partija pokera sastavljena od niza manjih situacija u kojima igrači donose odluke. U nekom većem uzorku poker-situacija, statistika nije ni na čijoj strani. Svakom igraču bit će podijeljen jednak broj dobrih i lošijih karata, a na ishod igre će, u konačnici, odlučiti vještina i iskustvo igrača. (Škobić, 2008)

U ovome radu računat će se vjerojatnost dobivanja određenih kombinacija. Odredit će se i statistika dobivanja tih kombinacija koja je napravljena prema vlastitom istraživanju, odnosno simulaciji partija pokera. Ideja je napraviti usporedbu između matematičkih vjerojatnosti i stvarnih ishoda.

## 2. ŠTO JE TEXAS HOLD'EM POKER

Texas Hold'em Poker kartaška je igra, unutar raznih poker igara, koja se igra s jednim kompletom od 52 karte. U tom kompletu nalaze se 4 boje Herc (Heart ♥), Karo (Diamond ♦), Tref (Clubs ♣) i Pik (Spades ♠), a svaka boja ima 13 karata (vrijednosti) – asa (A), kralja (K), damu (Q), dečka (J), desetku (10), devetku (9), osmicu (8), sedmicu (7), šesticu (6), peticu (5), četvorku (4), trojku (3) i dvojku (2). (PokerHarder, 2021)

Iako je povijest Texas Hold'em Pokera slabo poznata, on datira još iz ranih 1900ih godina, grad Robstown u Texasu je imenovan kao grad u kojem je ova igra nastala. Igra se brzo raširila kroz cijeli Texas, ali nije prelazila njegove granice sve do 1967., kada su Doyle Brunson, Amarillo Slim i Crandell Addington igru predstavili u Las Vegasu.

Poker dobiva na popularnosti kada su otac i sin, Benny i Jack Binion, 1970. godine kupili prava od neuspješne konvencije pokera Gambling Fraternity Convention te je preimenovali u World Series of Poker. U početku, WSOP nije ostvario veliku popularnost – 1972. godine turniru je prisustvovalo svega osam sudionika, ali broj igrača povećavao se tokom godina. Ključna godina bila je 1978. kada je predstavljena prva knjiga u poker svijetu, *Super System*, koju je napisao Doyle Brunson uz pomoć najpopularnijih poker igrača. Ta knjiga promijenila je pogled na Texas Hold'em Poker kao i način igranja. Navedena konvencija (WSOP) još uvijek djeluje te i dalje predstavlja najveću seriju poker turnira u svijetu. (GamblingSites, 2021)

## 2.1. Pravila Texas Hold'em Pokera

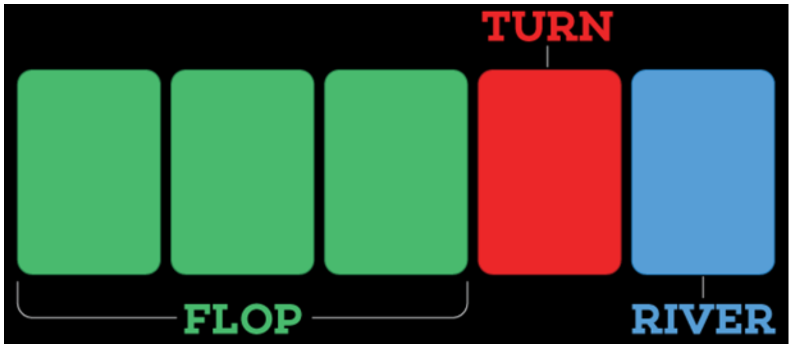
Texas Hold'em Poker igra je koja se može igrati između dva do maksimalno jedanaest igrača. Marker „D“ označava igrača umjesto kojeg dealer u kasinu dijeli karte. Na turniru se najčešće taj marker stavlja na posljednju poziciju dok se na cash igri ždrijebanjem (dealer svakome igraču podijeli po jednu kartu, a ispred igrača koji je dobio najjaču kartu stavlja se marker „D“) odlučuje na koju će se poziciju staviti marker. Prvi igrač s lijeve strane markera „D“ prvi dobiva karte i on je uvijek mali blind, a sljedeći igrač mora odigrati veliki blind. Mali i veliki blind su početni ulozi. Na cash igri uvelike utječu na jačinu igre, dok se na turniru konstantno mijenjaju s promjenom razina (eng. *level*) koje su vremenski određene. Veliki blind najčešće je duplo veći od malog blinda.

**Slika 1:** Markeri i pozicije za stolom


Izvor: (UpswingPoker, 2021)

Svaki igrač dobiva po dvije karte vidljive samo njemu, a dealer ih dijeli u smjeru kazaljke na satu, prvo svakome jednu, a potom drugu kartu. Nakon što su igrači dobili svoje karte, igrač nakon velikog blinda odlučuje hoće li odustati, pratiti ili povećati ulog. Nakon njega ide sljedeći igrač i tako dok se krug ne završi. Kada je prva akcija odrađena, kasino dealer skuplja sve uložene žetone na sredinu stola (eng. *pot*), ispod njega stavlja jednu kartu okrenutu licem prema dolje (spaljena karta) te zatim otvara tri karte okrenute da ih svi vide (eng *flop*). Nakon što je otvoren *flop*, prvi igrač iza markera, koji je i dalje u igri, ima pravo na prvi potez – uložiti, odustati ili samo pratiti igru bez podizanja uloga (eng. *check*). Nakon što je ta akcija završena, tj. nakon što su svi igrači odigrali, dealer ponovo „pali“ jednu kartu, a jednu okreće tako da je svi vide (eng. *turn*). Nakon *turna*, ponovo slijedi akcija igrača, a nakon toga, dealer opet „pali“ kartu te okreće petu kartu (eng. river). Svih pet „zajedničkih“ karata nazivaju se *board*. Potom igrači opet odigravaju akcije, a kada su sve akcije odigrane, igrači okreću svoje karte tako da svima budu vidljive.

**Slika 2:** *Board*



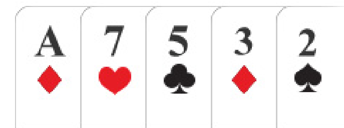

Izvor: (Sweeney, 2021)

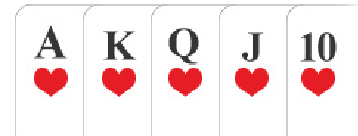
Izabirući pet od sedam karata, pobjednik je onaj igrač koji ima najjaču kombinaciju. Ta kombinacija može biti složena od dvije karte koje igrač ima u rukama i tri sa *boarda,* s jednom kartom iz ruke i četiri sa *boarda* ili svih pet karata sa *boarda.* Ako dva ili više igrača imaju istu kombinaciju, a ta kombinacija je najjača, *pot* se dijeli na jednake dijelove. (Škobić, 2008)

## 2.2. Dobitne kombinacije u Texas Hold'em Pokeru

U tablici će biti prikazane moguće dobitne kombinacije u Texas Hold'em Pokeru, počevši od najslabije pa do najjače.

**Tablica 1:** Kombinacije u Texas Hold'em Pokeru

| Naziv kombinacije | Opis | Primjer |
|---|---|---|
| Najjača karta (eng. *High Card*) | Ukoliko ne postoji niti jedna druga kombinacija, pobjedu odnosi igrač s najjačom kartom. |  |
| Par | Par predstavlja dvije karte jednake vrijednosti. |  |
| Dva para | Dva para predstavljaju dva puta po dvije karte iste vrijednosti. |  |
| Tris (eng. *Three of a Kind, Trips, Set*) | Tris predstavlja tri karte iste vrijednosti. |  |
| Skala (eng. *Straight*) | Skala predstavlja pet karata u nizu. |  |
| Boja (eng. *Flush*) | Boja predstavlja pet karata koje nisu u nizu, ali su iste boje, tj. simbola. |  |
| *Full House* | *Full House* predstavlja kombinaciju para i trisa. |  |
| Poker (eng. *Four of a Kind, Quads*) | Poker predstavlja četiri karte iste vrijednosti. |  |

| | | |
|---|---|---|
| Skala u boji (eng. *Straight Flush*) | Skala u boji je niz od pet karata u istoj boji, tj. istoga simbola. |  |
| *Royal Flush* | *Royal Flush* predstavlja niz od pet najjačih karta iste boje, tj. simbola. |  |

Izvor: Sistematizacija autora

## 3. SIMULACIJA IGRE TEXAS HOLD'EM POKER

Kako bi se mogle usporediti matematičke vjerojatnosti u Texas Hold'em Pokeru s realnom igrom, napravljena je simulacija igre. Simulacija uključuje uzorak od 32 partije pokera (dijeljenja) u kojoj su karte podijeljene na 8 pozicija koje predstavljaju 8 igrača. Akcije tokom igre su u potpunosti zanemarene, odnosno odluke koje bi igrači donijeli u stvarnoj igri su, radi pojednostavljenja, isključene.

Dobiveni set podataka će se iskoristiti i analizirati u sljedećim poglavljima.

**Tablica 2:** Simulacija

| 0 | igrač 1 | igrač 2 | igrač 3 | igrač 4 | igrač 5 | igrač 6 | igrač 7 | igrač 8 | board | Dobitna kombinacija |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Q♦6♥ | 7♣2♠ | 6♣A♦ | 7♦A♣ | 4♣4♥ | 9♣8♠ | J♠6♠ | K♠10♥ | Q♣5♦K♦ J♣ 10♦ | SKALA |
| 2 | 2♦7♦ | 2♣9♠ | 5♦2♥ | 9♥9♦ | Q♦10♠ | J♦6♥ | 4♥J♥ | 10♦3♠ | 7♥6♠3♥A♦3♦ | TRIS |
| 3 | 6♥A♠ | 5♠2♣ | 9♦9♣ | A♦4♣ | 9♥7♠ | 4♥4♠ | K♦Q♣ | 5♦7♥ | 8♠J♥6♠7♦K♥ | PAR |
| 4 | 3♠K♣ | A♠3♦ | 10♠2♥ | 10♦Q♣ | 6♥4♣ | K♥Q♦ | 3♣9♣ | A♥J♦ | J♣5♦K♠4♦8♥ | PAR |
| 5 | K♣2♣ | 2♠3♥ | 9♠Q♦ | 2♦7♦ | 5♥2♥ | A♥6♠ | 10♣5♣ | Q♥10♥ | Q♣6♣4♠8♦K♠ | PAR |
| 6 | 3♦10♥ | 7♦J♦ | J♥8♥ | J♣K♥ | K♠5♦ | 6♥9♣ | 4♦3♣ | J♠A♥ | 7♠6♦3♥A♠4♣ | SKALA |
| 7 | 7♥A♥ | Q♣5♥ | 5♦K♣ | 9♦2♣ | 5♣8♥ | 3♦6♦ | Q♠4♦ | 8♦Q♦ | 3♣A♠J♦7♣6♣ | DVA PARA |
| 8 | 3♦9♥ | 10♦Q♥ | 7♣J♥ | 6♣5♦ | K♦5♣ | A♦3♥ | 4♠K♣ | 3♣Q♦ | 8♥2♥5♥10♣A♣ | PAR |
| 9 | K♦J♦ | 2♣5♦ | 4♦Q♣ | 8♠4♠ | 2♥Q♥ | A♦9♠ | 3♦3♣ | 6♦K♣ | K♥A♥5♣K♠J♥ | FULL HOUSE |
| 10 | Q♠3♦ | 6♥2♣ | 4♣6♦ | 2♠4♥ | 10♠7♠ | 9♥5♣ | 7♦5♦ | 6♠7♣ | 4♦J♣K♣9♣6♣ | BOJA |
| 11 | 4♥6♦ | Q♦A♠ | 8♥10♦ | J♠K♣ | 3♣6♠ | 7♠6♣ | 5♥10♠ | 5♠7♦ | K♠K♦9♠2♦10♥ | TRIS |
| 12 | 7♣3♠ | 8♥6♠ | Q♣6♥ | 9♥7♠ | J♦Q♠ | 9♠A♠ | 5♠2♦ | A♦K♣ | J♥7♦5♥4♦3♥ | SKALA |
| 13 | 10♣3♠ | 9♣6♣ | Q♠6♠ | Q♣K♦ | 2♠9♠ | 9♥8♣ | K♣3♥ | 8♠10♦ | 6♥6♦4♣5♦8♦ | TRIS |
| 14 | A♥K♠ | 5♦K♦ | 9♣2♦ | 2♥A♣ | 8♣5♠ | K♥Q♦ | 7♥7♦ | 2♣Q♣ | J♣4♥3♥7♠4♦ | FULL HOUSE |
| 15 | 7♦9♦ | 2♥5♥ | A♠8♠ | K♦A♥ | 7♠9♠ | 10♦3♥ | 6♣2♠ | J♦6♠ | K♣Q♠2♣9♣9♥ | TRIS |
| 16 | 7♠7♣ | A♥6♦ | 3♥5♦ | 4♥J♥ | 3♠K♠ | A♠6♥ | 2♥J♠ | 2♣9♥ | Q♣9♣7♦3♦10♠ | TRIS |
| 17 | 2♥6♥ | 3♥A♣ | 6♣K♦ | 2♣4♥ | 4♠J♠ | 10♦J♣ | 7♥J♥ | A♦5♦ | Q♦A♥8♦10♣6♦ | BOJA |
| 18 | 9♥8♦ | 3♠J♠ | 10♦Q♥ | 2♥6♣ | 4♥A♠ | J♥8♣ | 5♥A♣ | 9♦2♠ | 7♠K♠6♥5♣5♠ | BOJA |
| 19 | 5♥J♥ | Q♣K♥ | 6♠6♥ | J♠2♠ | K♣A♦ | Q♥7♣ | 10♣A♣ | 3♦7♦ | 4♥2♥8♣A♠6♣ | TRIS |
| 20 | 3♥4♣ | 6♠8♣ | Q♥K♥ | 7♣8♦ | A♦6♣ | J♦7♦ | 9♣Q♣ | 10♦5♥ | 8♥10♥J♣3♠6♦ | SKALA |
| 21 | 6♣9♠ | 8♥4♣ | 9♦4♥ | 2♣4♦ | K♠10♥ | 6♠7♦ | A♦3♥ | A♠8♦ | 10♣3♦6♦A♥5♦ | SKALA |
| 22 | 7♥9♥ | 4♠5♥ | K♠5♠ | Q♦7♦ | 8♣A♠ | 9♠6♥ | 8♥9♣ | 5♦K♥ | 2♥3♠Q♣7♣J♣ | DVA PARA |
| 23 | 8♠3♠ | K♥Q♥ | A♦J♥ | 3♥6♣ | 8♥2♦ | Q♦Q♠ | 8♦7♠ | A♠10♥ | J♠8♣3♣5♠6♦ | DVA PARA |
| 24 | 10♠2♣ | 5♥4♥ | 4♠7♥ | 3♣A♣ | 9♠10♣ | 9♦9♣ | 10♦7♠ | Q♠5♣ | A♦A♥Q♣7♦K♣ | TRIS |
| 25 | A♦4♦ | 7♥3♦ | 5♠J♣ | 4♣A♣ | A♥5♥ | 3♣8♠ | 6♣A♠ | 7♦2♣ | 3♠Q♠9♣8♦K♣ | DVA PARA |
| 26 | A♣5♦ | 6♦4♦ | 2♥10♣ | 5♥Q♥ | 4♣9♠ | K♦2♠ | Q♠K♠ | 7♠5♠ | J♠A♦2♣6♣4♠ | DVA PARA |
| 27 | K♣4♥ | Q♣3♦ | 2♥5♣ | 8♦6♥ | 3♣7♣ | 10♠J♣ | 2♠4♦ | 10♣K♠ | 3♠6♣10♥7♠5♠ | SKALA |
| 28 | 10♠4♠ | 8♦A♣ | 10♦A♠ | 10♣Q♣ | K♠4♥ | Q♦5♥ | A♦2♥ | 3♠8♥ | 2♣7♥8♠Q♥6♦ | PAR |
| 29 | 7♦A♦ | J♣7♠ | 2♣9♦ | 4♠10♠ | A♥Q♣ | 8♠Q♠ | J♠K♥ | 3♣3♦ | 10♥7♣J♦K♠8♣ | SKALA |
| 30 | 6♥6♠ | A♠A♦ | 3♣2♥ | 3♠4♦ | 4♥2♣ | K♠4♠ | J♣9♣ | 5♥K♦ | 10♠9♦Q♦10♥A♣ | FULL HOUSE |
| 31 | 2♥J♠ | 10♥3♠ | K♥8♥ | 9♣A♠ | 7♦6♠ | 8♣J♦ | K♠J♣ | 10♦10♣ | Q♠J♥10♠3♣Q♦ | FULL HOUSE |
| 32 | 3♣2♦ | 2♣9♥ | 6♠Q♥ | 5♥K♣ | 10♥9♦ | A♠J♦ | 3♥4♦ | J♣10♠ | 7♣6♦K♦7♦9♠ | DVA PARA |

Izvor: Sistematizacija autora

Legenda za tablicu 1:

POBJEDNIČKI HAND

RUČNI PAR

*SUITANE* KARTE (karte iste boje, tj. znaka)

2 PARA

BOJA

TRIS KOJI NIJE DOBITAN

SKALA KOJA NIJE DOBITNA

# 4. RAZRADA I ANALIZA DOBIVENIH KOMBINACIJA

U ovom poglavlju detaljnije će se analizirati dobitne kombinacije u Texas Hold'em Pokeru. To podrazumijeva izračun matematičke vjerojatnosti i statistike te usporedbu dobivenih vrijednosti s rezultatima simulacije koje se nalaze u poglavlju 3.

Za određene izračune bit će potreban broj mogućih kombinacija koje se mogu dobiti u ruci (2 karte), a to će se izračunati binomnim koeficijentom (Pauše, 1993):

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{52}{2} = \frac{52 * 51}{2 * 1} = 1326$$

n – broj karata u setu

k – broj karata u ruci

Za kompleksnije dobitne kombinacije koje sadrže više od dvije karte potrebno je izračunati broj kombinacija s 5, odnosno 7 karata. To se računa sljedećim izrazima:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{52}{5} = \frac{52 * 51 * 50 * 49 * 48}{5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 2598960$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{52}{7} = \frac{52 * 51 * 50 * 49 * 48 * 47 * 46}{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 133784560$$

n – broj karata u setu

k – broj karata od kojih se slaže kombinacija

## 4.1. Par

Par je, kao što je već rečeno, kombinacija koja se sastoji od dvije karte jednakih vrijednosti. U ovome potpoglavlju izračunat će se koja je vjerojatnost i očekivanje dobivanja bilo kojeg para u ruci kao i vjerojatnost dobivanja specifičnog para u ruci. Također će se izračunati vjerojatnost dobivanja para u pet, odnosno u sedam karata. Vjerojatnosti ručnog para, kao i para općenito, usporedit će se s rezultatima simulacije.

### 4.1.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za par

Kako bi se izračunala vjerojatnost za dobivanje para u ruci potrebno je izračunati ukupan broj kombinacija parova u ruci:

$$\binom{n}{k} = \binom{13}{2} = \frac{13 * 12}{2 * 1} = 78$$

n – broj različitih vrijednosti u setu karata

k – broj karata u ruci

Potom računamo vjerojatnost:

$$P(bilo\ koji\ par\ u\ ruci) = \frac{78}{1326} = 0{,}0588\ ili\ 5{,}88\%$$

Iz dobivene vjerojatnosti može se izračunati očekivanje, odnosno nakon koliko odigranih partija (dijeljenja) igrač može očekivati dobivanje bilo kojeg para u ruci:

$$E(bilo\ koji\ par\ u\ ruci) = \frac{1}{P(bilo\ koji\ par\ u\ ruci)} = \frac{1}{0{,}0588} = 17{,}007$$

Ovi izračuni pokazuju da je vjerojatnost dobivanja bilo kojeg para u ruci 0,0588, tj. igrač može očekivati da će dobiti bilo koji par u ruci svakih 17 dijeljenja.

Za izračun vjerojatnosti dobivanja specifičnog para u ruci potrebno je odrediti broj mogućih kombinacija specifičnih parova:

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4 * 3}{2 * 1} = 6$$

n – broj različitih boja u setu karata

k – broj karata u ruci

Primjer koju predstavlja dobivena vrijednost:

7♠7♥, 7♠7♦, 7♠7♣, 7♥7♦, 7♥7♣, 7♦7♣

Zatim računamo vjerojatnost:

$$P(specifičan\ par\ u\ ruci) = \frac{6}{1326} = 0{,}00453\ ili\ 0{,}453\%$$

Iz dobivene vjerojatnosti može se izračunati očekivanje:

$$E(specifičan\ par\ u\ ruci) = \frac{1}{P(specifičan\ par\ u\ ruci)} = \frac{1}{0{,}00453} = 220{,}75$$

Ovi izračuni pokazuju da postotak za dobivanje specifičnog para u ruci (npr. par aševa) iznosi 0,453%, tj. igrač svako 221. dijeljenje može očekivati specifičan par u ruci.

Par se, osim u ruci, može dobiti i kombinacijom kada je u igri pet (dvije karte u ruci + tri karte na *boardu*), odnosno sedam karata (dvije karte u ruci + pet karata na *boardu*) od kojih se slaže konačna kombinacija. Kada je u igri ukupno pet karata, broj mogućih kombinacija za par dobiva se izrazom:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = \frac{13*4*3*12*11*10*4*4*4}{1*2*1*3*2*1*1*1*1} = 1098240$$

U izrazu član $\binom{13}{1}$ predstavlja jednu od trinaest vrijednosti unutar jedne boje koja će rezultirati parom, član $\binom{4}{2}$ predstavlja dvije boje te vrijednosti, član $\binom{12}{3}$ predstavlja ostale tri vrijednosti unutar jedne boje, ali da bi konačna kombinacija bila Par, te tri vrijednosti moraju biti različite. Član $\binom{4}{1}^3$ predstavlja boje preostalih vrijednosti koje ne sačinjavaju par.

Konačna vjerojatnost za dobivanje para u pet karata računa se izrazom:

$$P(par\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ za\ par\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{1098240}{2598960}$$
$$= 0{,}42257\ ili\ 42{,}26\%$$

Iz dobivene vjerojatnosti, računa se očekivanje za dobivanje para u pet karata:

$$E(par\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}42257} = 2{,}37$$

Očekivanje govori da igrač može očekivati dobivanje bilo kojeg para u pet karata otprilike svako 2. do 3. dijeljenje.

U slučaju kada se kombinacija slaže od sedam karata (dvije karte u ruci + pet karata a *boardu*), izračun za broj mogućih kombinacija je puno složeniji te je, zbog pojednostavljenja, preuzet iz literature. Broj mogućih kombinacija za par u sedam karata iznosi 58627800. (Skup autora, 2021)

Iz poznatih podataka može se izračunati vjerojatnost za dobivanje para u sedam karata:

$$P(par\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ para\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata} = \frac{58627800}{133784560}$$
$$= 0{,}43822\ ili\ 43{,}822\%$$

Iz toga proizlazi očekivanje:

$$E(par\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}43822} = 2{,}282$$

Očekivanje govori da igrač može očekivati par, kada je u igri sedam karata, otprilike svako 3. dijeljenje.

#### 4.1.2. Statistika iz simulacije za par

U simulaciji igre iz poglavlja 3, u 32 dijeljenja, ručni par pojavio se ukupno 14 puta. S obzirom da je u svakom dijeljenju sudjelovalo 8 igrača to nam ukupno daje 256 različitih kombinacija početnih karata. Postotak dobivanja ručnog para u simulaciji može se izračunati izrazom:

$$s(bilo\ koji\ par\ u\ ruci) = \frac{broj\ dobivenih\ ručnih\ parova}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{14}{256} = 0{,}05468\ ili\ 5{,}47\%$$

Iz priloženog može se vidjeti da statistika realne simulacije (5,47%) daje vrlo slične rezultate u usporedbi s izračunatom vjerojatnošću (5,88%).

Promatrajući specifične parove u simulaciji, može se uočiti da su neki parovi češće dobiveni u usporedbi s ostalim parovima. Tako, primjerice, par devetki dobiven je 3 puta, dok par osmica nije dobiven niti jednom. Postotke dobivanja određenih parova možemo prikazati izrazima:

$$s(specifičan\ par\ u\ ruci \to 9) = \frac{broj\ dobivenog\ para\ devetki}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{3}{256} = 0{,}0117\ ili\ 1{,}17\%$$

$$s(specifičan\ par\ u\ ruci \to 3) = \frac{broj\ dobivenog\ para\ trojki}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{2}{256} = 0{,}00783\ ili\ 0{,}78\%$$

$$s(specifičan\ par\ u\ ruci \to A) = \frac{broj\ dobivenog\ para\ aševa}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{1}{256} = 0{,}00391\ ili\ 0{,}39\%$$

$$s(specifičan\ par\ u\ ruci \to 5) = \frac{broj\ dobivenog\ para\ petica}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{0}{256} = 0\ ili\ 0\%$$

Iz priloženog se može vidjeti da izračunatoj vjerojatnosti (0,453%) odgovaraju parovi iz simulacije koji su izvučeni jednom, poput aševa. Pretpostavka je da bi se u većem uzorku podataka postotci dobivenih parova ujednačili. Prema rezultatima simulacije za očekivati je da bi u sljedećim dijeljenjima trebali biti podijeljeni parovi koji se još nisu pojavili.

U simulaciji par, neovisno o tome je li ručni ili složen iz kombinacije, u prvih pet karata pojavio se 103 puta. Prema tome, postotak pojavljivanja para (u prvih pet karata) u simulaciji može se izračunati:

$$s(par\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ para\ u\ pet\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{103}{256} = 0{,}4023\ ili\ 40{,}23\%$$

Gledajući sedam karata, par se u simulaciji pojavio 97 puta. Broj pojavljivanja para u sedam karata je manji nego u pet karata jer se događalo da kombinacija koja predstavlja par u prvih pet karata, kada se dodaju još dvije karte, predstavlja jaču kombinaciju od para. Postotak pojavljivanja para u sedam karata računa se:

$$s(par\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ para\ u\ sedam\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{97}{256}$$
$$= 0{,}3789\ ili\ 37{,}89\%$$

Uspoređujući izračunatu vjerojatnost za dobivanje para u pet, odnosno sedam karata (42,26% i 43,82%) i statističke podatke iz simulacije (pojavljivanje para u pet karata – 40,23% i pojavljivanje para u sedam karata – 37,89%) uočava se razlika od dva postotna boda za dobivanje para u pet karata i čak skoro šest postotnih bodova u dobivanju para u sedam karata. Statistička pogreška uvijek postoji, a pretpostavka je da bi se u većem uzorku postotci vjerojatnosti i postotci statistike iz simulacije približili.

Iz simulacije još možemo vidjeti da je par u 15,625% slučajeva bio dobitna kombinacija.

## 4.2. Dva para

Dva para je kombinacija koja predstavlja dva puta po dvije karte iste vrijednosti. Ona može biti dobivena na način da igrač ima ručni par te još jedan par na *boardu* ili da u ruci ima dvije karte različite vrijednosti te se karte tih vrijednosti također pojave na *boardu*.

### 4.2.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za dva para

Kada je u igri ukupno pet karata, dvije u ruci te tri na *boardu*, broj mogućih kombinacija za dva para mogu se izračunati na sljedeći način:

$$\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1} = \frac{13 * 12 * 4 * 3 * 4 * 3 * 11 * 4}{2 * 1 * 2 * 1 * 2 * 1 * 1 * 1} = 123522$$

$\binom{13}{2}$ predstavlja da se od 13 mogućih vrijednosti biraju dvije od kojih će se sačiniti dva para, $\binom{4}{2}^2$ definira da se od odabranih dviju vrijednosti biraju dvije boje koje će sačinjavati par, $\binom{11}{1}$ označava preostalih jedanaest vrijednosti koje se mogu pojaviti uz dvije vrijednosti koje već sačinjavaju dva para, a $\binom{4}{1}$ predstavlja jednu od četiri boje za preostalih jedanaest vrijednosti van parova.

Konačna vjerojatnost za dobivanje dva para u pet karata:

$$P(dva\ para\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ za\ dva\ para\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{123522}{2598960}$$
$$= 0{,}0475\ ili\ 4{,}75\%$$

Iz toga slijedi očekivanje:

$$E(dva\ para\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}0475} = 21{,}05$$

Znači da igrač može očekivati dva para u pet karata približno svako 21. dijeljenje.

U slučaju kada je ukupno sedam karata u igri (2 u ruci + 5 na *boardu*) izračun kombinacija za dva para postaje višestruko složeniji te će se, zbog pojednostavljenja, preuzeti iz literature. Broj mogućih kombinacija za dva para u slučaju kada je sedam karata u igri iznosi 31433400. (Skup autora, 2021)

Iz navedenih podataka vjerojatnost za dobivanje dva para unutar sedam karata u igri može se izračunati na sljedeći način:

$$P(dva\ para\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ dva\ para\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata}$$
$$= \frac{31433400}{133784560} = 0{,}23495\ ili\ 23{,}495\%$$

Iz toga slijedi očekivanje:

$$E(dva\ para\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}23495} = 4{,}26$$

Iz priloženog može se zaključiti da igrač može očekivati dobitak dva para približno svakih 4 do 5 dijeljenja.

#### 4.2.2. Statistika iz simulacije za dva para

U simulaciji iz poglavlja 3, dva para pojavljuju se ukupno 41 puta, od toga 4 puta u prvih pet karata. Koristeći se podatkom da je sudjelovalo 8 igrača u 32 dijeljenja, to nam daje ukupno 256 *handova*. Iz navedenih podataka možemo izračunati postotak pojavljivanja dva para iz simulacije:

$$s(dva\ para\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ dva\ para\ u\ pet\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{4}{256}$$
$$= 0{,}0156\ ili\ 1{,}56\%$$

$$s(dva\ para\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ dva\ para\ u\ sedam\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{41}{256}$$
$$= 0{,}1602\ ili\ 16{,}02\%$$

Ovi rezultati pokazuju da je u simulaciji kombinacija dva para dobivena u manjem postotku u odnosu na izračunatu vjerojatnost. Primjerice, izračunati postotak dobivanja dva para u pet karata je iznosio 4,75%, dok u simulaciji iznosi 1,56%. Slično ponašanje vrijedi za dobivanje dva para u sedam karata gdje je izračunata vjerojatnost iznosila 23,495%, a u simulaciji iznosi 16,02%.

Postotak u kojem, u simulaciji, dva para odnose pobjedu iznosi 15,625%.

### 4.3. Tris

Tris je kombinacija koja predstavlja tri karte iste vrijednosti. Ona može biti dobivena da igrač u ruci ima par te još jednu kartu iste vrijednosti na *boardu* ili u ruci kartu neke vrijednosti i dvije karte iste te vrijednosti na *boardu*.

#### 4.3.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za tris

Kada je u igri ukupno pet karata, dvije u ruci te tri na *boardu*, broj mogućih kombinacija za tris mogu se izračunati na sljedeći način:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = \frac{13 * 4 * 3 * 2 * 12 * 11 * 4 * 4}{1 * 3 * 2 * 1 * 2 * 1 * 1 * 1} = 54912$$

U navedenom izrazu, prvi član $\binom{13}{1}$ označava da iz ukupno trinaest vrijednosti biramo jednu koja će rezultirati trisom, drugi član $\binom{4}{3}$ prezentira tri boje koje se odabiru od ukupno četiri mogućih, zatim član $\binom{12}{2}$ definira preostalih dvanaest vrijednosti od kojih se biraju dvije te $\binom{4}{1}^2$ predstavlja boju karata koja se bira od preostalih vrijednosti koje nisu u tris kombinaciji.

Iz izračunatog broja mogućih kombinacija trisa u pet karata može se izračunati vjerojatnost:

$$P(tris\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ trisa\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{54912}{2598960}$$
$$= 0{,}0211\ ili\ 2{,}11\%$$

Nakon toga slijedi očekivanje:

$$E(tris\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}0211} = 47{,}39$$

Znači da igrač može očekivati dobivanje trisa u pet karata svakih 47 do 48 dijeljenja.

Broj mogućih kombinacija za tris, kada je u igri sedam karata, je radi pojednostavljenja preuzet iz literature, a iznosi 6461620. (Skup autora, 2021)

Iz navedenih podataka vjerojatnost za tris, dok je u igri sedam karata, računa se na sljedeći način:

$$P(tris\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ trisa\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata} = \frac{6461620}{133784560}$$
$$= 0{,}04829\ ili\ 4{,}829\%$$

Iz navedene vjerojatnosti može se odrediti očekivanje:

$$E(tris\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}04829} = 20{,}71$$

Igrač tris može očekivati približno svako 21. dijeljenje.

#### 4.3.2. Statistika iz simulacije za tris

U simulaciji tris je dobiven 11+1 puta, od toga 4 puta u prvih pet karata, i još jednom, ali taj tris je u konačnici rezultirao *Full House*-om.

$$s(tris\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ trisa\ u\ pet\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{5}{256} = 0{,}0195\ ili\ 1{,}95\%$$

$$s(tris\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ trisa\ u\ sedam\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{11}{256}$$
$$= 0{,}0429\ ili\ 4{,}29\%$$

Dobiveni rezultati nam pokazuju da postotak dobivanja trisa u pet karata u simulaciji iznosi 1,95% dok je izračunata vjerojatnost iznosi 2,11%. Postotak dobivanja trisa u sedam karata u simulaciji iznosi 4,29%, a izračunata vjerojatnost iznosi 4,829%. Iz konačnih rezultata može se uočiti vrlo malo odstupanje.

Tris je u simulaciji bio dobitna kombinacija u 15,63% dijeljenja.

### 4.4. Skala

Skala je kombinacija od pet karata u nizu vrijednosti. Skala se može kombinirati s obje karte iz ruke i tri s *boarda*, s jednom kartom u ruci i četiri s *boarda* ili se skala može pojaviti na *boardu* i u tom slučaju ne ovisi o kartama u ruci.

#### 4.4.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za skalu

Ako je u igri ukupno pet karata, ukupni broj kombinacija za skalu može se izračunati izrazom:

$$\binom{10}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} - \binom{10}{1}\binom{4}{1} = \frac{10 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4}{1} - \frac{10 * 4}{1} = 10200$$

U navedenom izrazu $\binom{10}{1}$ označava 10 vrijednosti koje mogu predstavljati najjaču kartu u skali. Primjerice, vrijednosti 2, 3 i 4 ne mogu predstavljati najjaču kartu u skali jer se skala sastoji od 5 karata u nizu, a najniža moguća je As. Skala s najnižom kartom As izgleda A-2-3-4-5. As ujedno može predstavljati i najjaču kartu u skali – 10-J-Q-K-A. Dakle, bira se jedna od 10 mogućih vrijednosti. $\binom{4}{1}^5$ predstavlja jednu boju (od moguće četiri) za svaku od pet karata. Izraz koji oduzimamo predstavlja broj mogućih kombinacija skale u boji.

Iz izračunatog broja mogućih kombinacija skala u pet karata može se izračunati vjerojatnost:

$$P(skala\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ skale\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{10200}{2598960}$$
$$= 0{,}00392\ ili\ 0{,}392\%$$

Izračun očekivanja:

$$E(skala\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}00392} = 255{,}102$$

Očekivanje pokazuje da igrač može skalu u prvih pet karata očekivati svako 255. dijeljenje.

Broj mogućih kombinacija za skalu, kada je u igri sedam karata, radi pojednostavljenja je preuzet iz literature, a iznosi 6180020. (Skup autora, 2021)

Iz navedenih podataka vjerojatnost za skalu, dok je u igri sedam karata, računa se na sljedeći način:

$$P(skala\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ skala\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata} = \frac{6180020}{133784560}$$
$$= 0{,}04619\ ili\ 4{,}619\%$$

Iz navedene vjerojatnosti može se odrediti očekivanje:

$$E(skala\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}04619} = 21{,}65$$

Zaključuje se da igrač, kada je u igri sedam karata, skalu može očekivati otprilike svako 22. dijeljenje.

#### 4.4.2. Statistika iz simulacije za skalu

U simulaciji iz poglavlja 3, skala se pojavljuje 11 puta, od toga svega jednom u prvih pet karata. Postotak pojavljivanja skale u simulaciji prikazat će se izrazima:

$$s(skala\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ skale\ u\ pet\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{1}{256} = 0{,}00391\ ili\ 0{,}391\%$$

$$s(skala\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ skale\ u\ sedam\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{11}{256}$$
$$= 0{,}0429\ ili\ 4{,}29\%$$

Iz dobivenih rezultata može se uočiti vrlo blago odstupanje od izračunatih vjerojatnosti. Postotak dobivanja skale u pet karata iz simulacije iznosi 0,391% dok iz izračunate vjerojatnosti dobivamo postotak od 0,392%. Postotak dobivanja skale iz simulacije u situaciji kada je sedam karata u igri iznosi 4,29% dok iz izračunate vjerojatnosti taj postotak iznosi 4,619%.

Skala je, kao dobitna kombinacija, u 32 dijeljenja u simulaciji bila u 18,75% dijeljenja.

### 4.5. Boja

Boja predstavlja kombinaciju od pet karata iste boje, tj. znaka, koje nisu u nizu. Boja se može dobiti koristeći dvije karte iz ruke (tzv. *suited hand*) i tri karte s *boarda*, s jednom kartom iz ruke i četiri s boarda ili se na *boardu* može pojaviti pet karata u istoj boji (tzv. monotoni *board*).

#### 4.5.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za boju

Za računanje svih mogućih kombinacija koje daju boju, kada je u igri pet karata, koristi se izraz:

$$\binom{13}{5}\binom{4}{1} - \binom{10}{1}\binom{4}{1} = \frac{13*12*11*10*9*4}{5*4*3*2*1*1} - \frac{10*4}{1} = 5108$$

Prvi izraz s lijeva $\binom{13}{5}$ označava kombinaciju pet odabranih vrijednosti od trinaest mogućih. Potom slijedi $\binom{4}{1}$ koji označava da odabranih pet vrijednosti sve moraju biti iste boje, a zatim se oduzima broj mogućih kombinacija koje daju skalu u boji.

Sada se može izračunati vjerojatnost dobivanja boje u pet karata koristeći izraz:

$$P(boja\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ boje\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{5108}{2598960}$$
$$= 0{,}00197\ ili\ 0{,}197\%$$

Zatim se može odrediti očekivanje:

$$E(boja\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}00197} = 507{,}61$$

Rezultat prikazuje da igrač boju u pet karata može očekivati otprilike svako 508. dijeljenje.

Broj mogućih kombinacija za dobivanje boje, kada je u igri sedam karata, prema literaturi iznosi 4047644. (Skup autora, 2021) Vjerojatnost dobivanja boje kada je u igri sedam karata računa se izrazom:

$$P(boja\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ boje\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata} = \frac{4047644}{133784560}$$
$$= 0{,}03025\ ili\ 3{,}025\%$$

Iz dobivene vjerojatnosti proizlazi očekivanje:

$$E(boja\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}03025} = 33{,}06$$

Kada je u igri sedam karata, prema rezultatu, igrač boju može očekivati svako 33. dijeljenje.

#### 4.5.2. Statistika iz simulacije za boju

U simulaciji iz poglavlja 3 boja se pojavljuje 6 puta, a od toga niti jednom u prvih pet karata. Postotak dobivanja skale u simulaciji računa se sljedećim izrazom:

$$s(boja\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ boje\ u\ sedam\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{6}{256}$$
$$= 0{,}0234\ ili\ 2{,}34\%$$

S obzirom da izračunata vjerojatnost dobivanja boje u pet karata iznosi svega 0,197%, nije neobično što se u simulaciji nije dogodila boja u prvih pet karata. Postotak dobivanja boje u sedam karata iz simulacije (2,34%) lagano odstupa od izračunate vjerojatnosti koja iznosi 3,025%.

Boja je u 9,38% dijeljenja iz simulacije bila dobitna kombinacija.

### 4.6. *Full House*

*Full House* kombinacija je koja spaja par i tris. Može biti dobivena na način da igrač ima par u ruci, a na *boardu* se pojavi tris druge vrijednosti ili da igrač u ruci ima dvije karte različitih vrijednosti, a na *boardu* se pojavi jedna karta jedne od tih vrijednosti te dvije karte druge vrijednosti.

#### 4.6.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za *Full House*

Ako je u igri ukupno pet karata, ukupni broj kombinacija za *Full House* može se izračunati izrazom:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2} = \frac{13 * 4 * 3 * 2 * 12 * 4 * 3}{1 * 3 * 2 * 1 * 1 * 2 * 1} = 3744$$

Prvi član $\binom{13}{1}$ u izrazu označava jednu vrijednost od mogućih trinaest, a član $\binom{4}{3}$ tri boje od mogućih četiri za odabranu vrijednost. To nam zajedno daje broj kombinacija za tris. Druga dva člana daju kombinaciju koja označava par (umanjeno za onu vrijednost koja daje tris) te to u konačnici rezultira mogućim kombinacijama za *Full House* u pet karata.

Vjerojatnost dobivanja *Full House*-a u pet karata računa se na sljedeći način:

$$P(Full\ House\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ Full\ House\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{3744}{2598960}$$
$$= 0{,}00144\ ili\ 0{,}144\%$$

Očekivanje za *Full House* u pet karata:

$$E(Full\ House\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}00144} = 694{,}44$$

Kada je u igri pet karata, igrač *Full House* može očekivati svako 694. do 695. dijeljenje.

Prema literaturi, broj mogućih kombinacija za *Full House* kada je u igri sedam karata iznosi 3473184. (Skup autora, 2021) Iz toga proizlazi vjerojatnost:

$$P(Full\ House\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ Full\ House\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata}$$
$$= \frac{3473184}{133784560} = 0{,}02596\ ili\ 2{,}596\%$$

Očekivanje za *Full House* u sedam karata:

$$E(Full\ House\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}02596} = 38{,}52$$

Rezultat očekivanja govori da igrač, kada je u igri sedam karata, *Full House* može očekivati otprilike svako 39. dijeljenje.

#### 4.6.2. Statistika iz simulacije za *Full House*

*Full House* je u simulaciji iz poglavlja 3 dobiven svega četiri puta u ukupno sedam karata, što potvrđuju rezultat očekivanja *Full House*-a u pet karata. Postotak dobivanja *Full House*-a računa se:

$$s(Full\ House\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ dobivanja\ Full\ House\ u\ sedam\ karata}{broj\ dobivenih\ kombinacija} = \frac{4}{256}$$
$$= 0{,}0156\ ili\ 1{,}56\%$$

U usporedbi statističkih podataka iz simulacije te vjerojatnosti, uočava se razlika u postotku za čak jedan postotni bod, ali pretpostavka je da bi se na većem uzorku postotak iz simulacije približio dobivenoj vjerojatnosti.

U 12,5% dijeljenja je *Full House* bio dobitna kombinacija.

## 4.7. Poker

Poker, kako mu i engleski naziv kaže (*Four of a Kind*) predstavlja kombinaciju od četiri karte iste vrijednosti. Može se dobiti kombinirajući par iz ruke i par iste vrijednosti s *boarda*, kombinirajući jednu kartu iz ruke i tri karte iste vrijednosti s *boarda* ili se četiri karte iste vrijednosti mogu pojaviti na *boardu*.

### 4.7.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za poker

Broj mogućih kombinacija za poker, kada je u igri pet karata, računa se na sljedeći način:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1} = \frac{13 * 4 * 3 * 2 * 1 * 12 * 4}{1 * 4 * 3 * 2 * 1 * 1 * 1} = 624$$

Član $\binom{13}{1}$ označava jednu vrijednost od mogućih trinaest vrijednosti unutar jedne boje. Član $\binom{4}{4}$ označava sve četiri boje tog odabranog člana. Članovi $\binom{12}{1}$ i $\binom{4}{1}$ označavaju petu kartu drugačije vrijednosti i jedne od četiri moguće boje.

S dobivenim podacima računa se vjerojatnost dobivanja pokera unutar pet karata:

$$P(poker\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ Pokera\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{624}{2598960}$$
$$= 0{,}00024\ ili\ 0{,}024\%$$

Iz toga proizlazi očekivanje:

$$E(poker\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}00024} = 4166{,}67$$

Igrač kombinaciju od četiri karte iste vrijednosti (Poker), kada je u igri pet karata, može očekivati tek svako 4.167 dijeljenje.

Broj mogućih kombinacija za poker, kada je u igri sedam karata, prema literaturi iznosi 224848. (Skup autora, 2021) Vjerojatnost dobivanja pokera unutar sedam karata:

$$P(poker\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ poker\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata} = \frac{224848}{133784560} = 0{,}00168\ ili\ 0{,}168\%$$

Iz toga proizlazi očekivanje:

$$E(poker\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}00168} = 595{,}24$$

Igrač, kada je u igri sedam karata, poker može očekivati otprilike svako 596. dijeljenje.

#### 4.7.2. Statistika iz simulacije za poker

U simulaciji se u niti jednom dijeljenju nije pojavio poker. Prema izračunatim vjerojatnostima i očekivanjima u poglavlju 4.7.1. i s obzirom na broj uzoraka u simulaciji, činjenica da se poker nije pojavio nije iznenađujuća. Prema podacima iz prethodnog poglavlja, potreban je puno veći broj dijeljenja da bi se pojavila kombinacija s četiri karte iste vrijednosti.

### 4.8. Skala u boji

Skala u boji (eng. *Straight Flush*) predstavlja kombinaciju pet vrijednosti u nizu, iste boje, ali u tom nizu najjača karta može biti kralj (K). Kombinacija može biti dobivena na način da igrač u ruci ima dvije karte iste boje (eng. *suited hand*), ali vrijednosti tih karata moraju biti u maksimalnom razmaku od tri vrijednosti (npr. A♠5♠) te tri karte iste boje, ali odgovarajućih vrijednosti za skalu, s *boarda*. Također, igrač može u ruci, od dvije karte, imati jednu koja je potrebna da se složi skala u boji u kombinaciji s četiri karte s *boarda* (npr. igrač 10♠K♣, board Q♠J♠9♠8♠5♣).

#### 4.8.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za skalu u boji

Broj mogućih kombinacija za skalu u boji (maksimalno do kralja), kada je u igri pet karata, dobiva se izrazom:

$$\binom{9}{1}\binom{4}{1} = \frac{9 * 4}{1 * 1} = 36$$

U ovom izrazu član $\binom{9}{1}$ označava 9 vrijednosti koje mogu predstavljati najjaču kartu u skali. U poglavlju 4.4.1., kada su se računale sve moguće kombinacije za skalu, postojale su 10 vrijednosti koje su mogle predstavljati najjaču kartu u skali, ali kada je riječ o skali u boji, As kao najjača vrijednost mora biti isključen. Izraz $\binom{4}{1}$ predstavlja da svih pet karata koje čine skalu moraju biti u istoj boji.

Iz dobivenih podataka računa se vjerojatnost za skalu u boji u pet karata:

$$P(skala\ u\ boji\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ skale\ u\ boji\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{36}{2598960}$$
$$= 0{,}0000139\ ili\ 0{,}00139\%$$

Očekivanje za skalu u boji u pet karata:

$$E(Skala\ u\ boji\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}0000139} = 71942{,}45$$

Očekivanje dobiveno iz izračuna govori da igrač skalu u boji, u pet karata, može očekivati tek otprilike svako 71943. dijeljenje

Broj kombinacija za skalu u boji, kada je u igri sedam karata, prema literaturi iznosi 37260. (Skup autora, 2021) Iz toga proizlazi vjerojatnost:

$$P(skala\ u\ boji\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ skale\ u\ boji\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata}$$
$$= \frac{37260}{133784560} = 0{,}000279\ ili\ 0{,}0279\%$$

Očekivanje za skalu u boji u sedam karata iznosi:

$$E(skala\ u\ boji\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}000279} = 3584{,}23$$

Kada je u igri sedam karata, igrač skalu u boji može očekivati svako 3584. dijeljenje.

### 4.8.2. Statistika iz simulacije za skalu u boji

Skala u boji, kao ni poker, u simulaciji se nije pojavila. S obzirom da je izračunata vjerojatnost dobivanja skale u boji kako u pet karata, tako i u sedam, vrlo mala, ponovno ne začuđuje što se u simulaciji od svega 32 dijeljenja skala u boji ne pojavljuje.

### 4.9. *Royal Flush*

*Royal Flush* je zapravo vrsta skale u boji, ali *Royal Flush* je skala u boji do asa. Zato je u izračunima iz prethodnog poglavlja as morao biti isključen kao najjača moguća vrijednost skale. *Royal Flush* može biti dobiven tako da igrač u ruci ima dvije karte iste boje, čije vrijednosti moraju biti između desetke i asa (pr. 10♥K♥) te se na bordu pojavljuju vrijednosti između desetke i asa iste boje kao što su vrijednosti karata koje igrač ima u ruci (pr. Q♥J♥A♥). Naravno, *Royal Flush* može se dobiti i kombinirajući jednu kartu iz ruke (vrijednosti od desetke do asa) i četiri s boarda (vrijednosti od desetke do asa i iste boje kao vrijednost karte u rukama igrača). *Royal Flush* je najjača dobitna kombinacija u Texas Hold'em Pokeru.

#### 4.9.1. Izračun vjerojatnosti i očekivanja za *Royal Flush*

Broj mogućih kombinacija za *Royal Flush*, kada je u igri pet karata, nije teško za izračunati:

$$\binom{4}{1} = 4$$

U kompletu od 52 karte s kojima se igra Poker nalaze se četiri boje. *Royal Flush* je specifična skala u boji, najmanja vrijednost joj je uvijek 10, a najjača vrijednost je uvijek as. Kada je u igri pet karata, moguće su samo četiri kombinacije dobivanja *Royal Flush*-a – niz od desetke do asa u jednoj od četiri boje.

Vjerojatnost dobivanja *Royal Flush*-a u pet karata računa se izrazom:

$$P(Royal\ Flush\ u\ pet\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ Royal\ Flush\ u\ pet\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ pet\ karata} = \frac{4}{2598960}$$
$$= 0{,}00000154\ ili\ 0{,}00015\%$$

Očekivanje za *Royal Flush* u pet karata:

$$E(Royal\ Flush\ u\ pet\ karata) = \frac{1}{0{,}00000154} = 649350{,}65$$

Očekivanje je da će se, kada je u igri pet karata, *Royal Flush* pojaviti svako 649351. dijeljenje.

Kada je u igri sedam karata, broj kombinacija za *Royal Flush* se povećava. Prema literaturi on iznosi 4324. (Skup autora, 2021) Vjerojatnost za dobivanje *Royal Flush*-a kad je u igri sedam karata računa se izrazom:

$$P(Royal\ Flush\ u\ sedam\ karata) = \frac{broj\ kombinacija\ Royal\ Flush\ u\ sedam\ karata}{broj\ mogućih\ kombinacija\ u\ sedam\ karata}$$

$$= \frac{4324}{133784560} = 0{,}0000323\ ili\ 0{,}00323\%$$

Očekivanje za dobivanje Royal Flush-a u sedam karata:

$$E(Royal\ Flush\ u\ sedam\ karata) = \frac{1}{0{,}0000323} = 30959{,}75$$

Prema navedenom izračunu, kada je u igri sedam karata, igrač može očekivati Royal Flush svako 30960. dijeljenje.

#### 4.9.2. Statistika iz simulacije za *Royal Flush*

Nimalo neočekivano, u simulaciji iz poglavlja 3, *Royal Flush* nije dobiven. S obzirom na izračunate vjerojatnosti, koje su, kao i kod pokera i skale u boji, vrlo male, dobivanje *Royal Flush*-a nije niti očekivano u simulaciji koja se sastoji od 32 uzorka.

## 5. PRIKAZ VJEROJATNOSTI I OČEKIVANJA

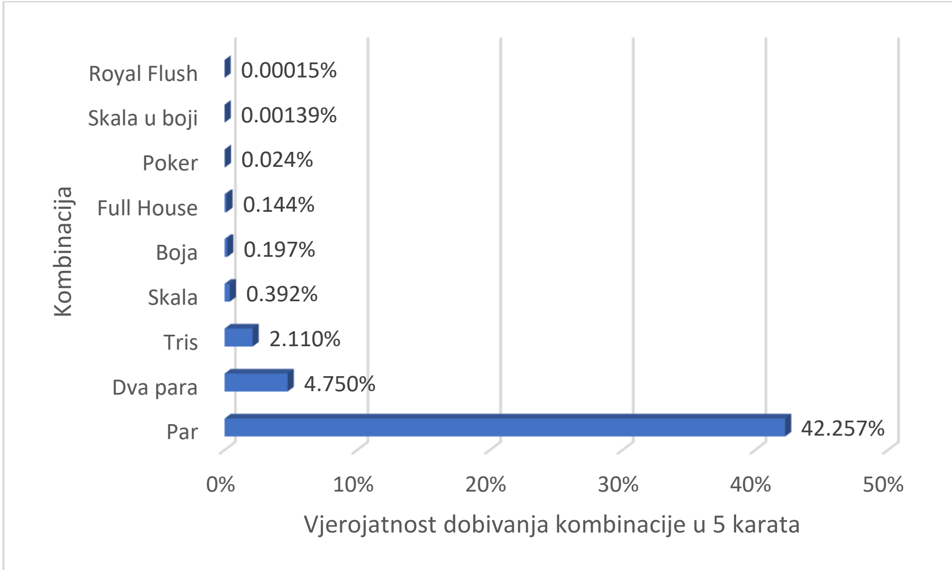
U ovome poglavlju, izračunate vjerojatnosti u prethodnim poglavljima, kao i izračunata očekivanja bit će prikazana tablično i grafički.

**Tablica 3:** Vjerojatnosti i broj očekivanih dijeljenja za kombinacije

| Kombinacija | Vjerojatnost za dobivanje u 5 karata | Očekivani broj dijeljenja za dobitak kombinacije u 5 karata | Vjerojatnost za dobivanje u 7 karata | Očekivani broj dijeljenja za dobitak kombinacije u 7 karata |
|---|---|---|---|---|
| Par | 0,42257 | 2,37 | 0,43822 | 2,82 |
| Dva para | 0,0475 | 21,05 | 0,23495 | 4,26 |
| Tris | 0,0211 | 47,39 | 0,04829 | 20,71 |
| Skala | 0,00392 | 255,102 | 0,04619 | 21,65 |
| Boja | 0,00197 | 507,61 | 0,03025 | 33,06 |
| *Full House* | 0,00144 | 694,44 | 0,02596 | 38,52 |
| Poker | 0,00024 | 4166,67 | 0,00168 | 595,24 |
| Skala u boji | 0,0000139 | 71942,45 | 0,000279 | 3584,23 |
| *Royal Flush* | 0,00000154 | 649350,65 | 0,0000323 | 30959,75 |

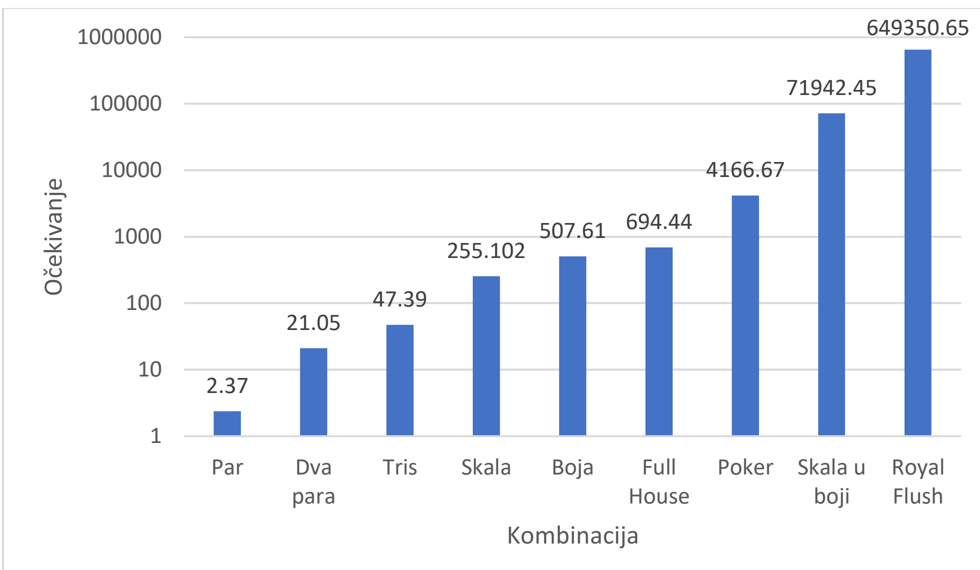
Izvor: Sistematizacija autora

**Graf 1**: Vjerojatnost dobivanja kombinacije u pet karata



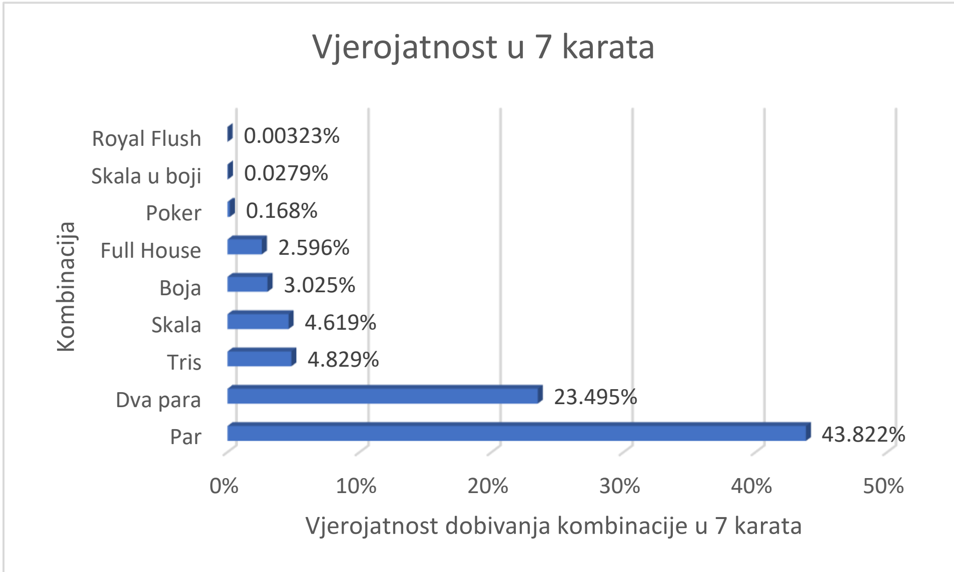

Izvor: Sistematizacija autora

**Graf 2:** Broj očekivanih dijeljenja za dobivanje određene kombinacije u pet karata



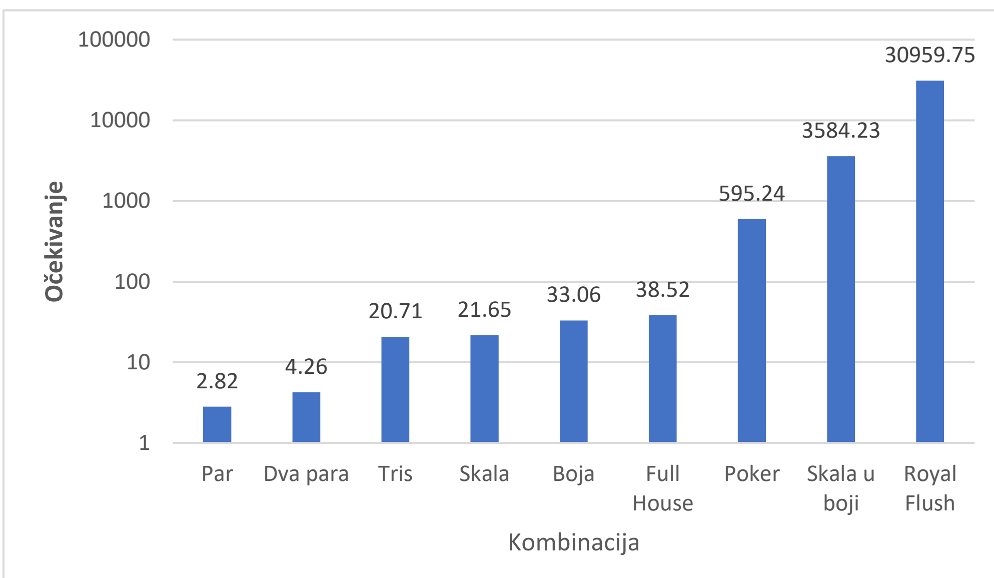

Izvor: Sistematizacija autora

**Graf 3:** Vjerojatnost dobivanja kombinacije u sedam karata




Izvor: Sistematizacija autora

**Graf 4:** Broj očekivanih dijeljenja za dobivanje određene kombinacije u sedam karata




Izvor: Sistematizacija autora

# 6. ZAKLJUČAK

U ovome radu su izračunate matematičke vjerojatnosti za dobitne kombinacije u Texas Hold'em Pokeru te su uspoređene sa simulacijom stvarne igre. U usporedbi dobivenih vjerojatnosti za svaku kombinaciju i postotaka dobivenih kombinacija u simulaciji stvarne igre, postotak svake kombinacije približan je izračunatoj vjerojatnosti, ali nije isti. Razlog tome je što se vjerojatnost računa isto za svakog igrača, nebitno o poziciji koju on ima u tom dijeljenju. Ni jedan igrač nije uvijek prvi na redu, ali igraču koji npr. četvrti dobiva karte, više ne igraju sve karte iz kompleta karata. U drugom krugu dijeljenja, ni igraču koji je prvi na redu ne igra više 51 karta uz kartu koju je već dobio, nego broj karata umanjen za broj igrača koji su „iza“ prvog igrača. To uzrokuje statističku pogrešku koja se može primijetiti uspoređujući izračunate vjerojatnosti i postotke dobivanja kombinacija iz simulacije. Igrač, također, ne može znati koje karte njemu više ne igraju s obzirom da igrač ne vidi tuđe karte već samo svoje. Upravo zbog tog razloga, igrač koji poznaje matematiku Pokera, za vjerojatnosti će uvijek koristiti isti proračun. Također, blago odstupanje iz izračunatih postotaka i postotaka iz simulacije može proizlaziti iz premalog broja uzoraka napravljenih u simulaciji. Očekivanje je da bi se s većim uzorkom odstupanje umanjilo.

Onaj igrač Pokera kojeg se može smatrati dobrim igračem, vrlo vjerojatno poznaje matematiku Pokera, ali zna i „čitati“ svoje protivnike. Matematika je veliki dio uspjeha, ali svakom igraču, osim poznavanje matematike, na igru utječe iskustvo i procjena protivnika. Sve to zajedno utječe na konačnu odluku igrača. Ta odluka možda neće biti pozitivna svaki put, ali u većini slučajeva će znanje, vještina i iskustvo rezultirati pozitivnim ishodima. Dobar igrač pokera mora poznavati matematiku, mora imati strpljenja, a faktor sreće, kojeg ne smijemo zanemariti, će biti najmanje bitan u cjelokupnoj igri.

**POPIS LITERATURE:**

KNJIGE:

1. Pauše, Ž., 1993. *Uvod u matematičku statistiku.* Zagreb: Školska knjiga.

2. Škobić, V., 2008. *Texas Hold'em Poker, Sport 21. stoljeća - I. dio Sport iz naslonjača.* Zagreb: IROS d.o.o..

INTERNETSKI IZVORI:

1. Falleta, J., & Woodcock, S. (2018). A simulation study of Texas Hold 'em poker: what Taylor Swift understands and . Sydney: The ANZIAM Journal. Preuzeto 28. kolovoz 2021 iz https://www.researchgate.net/publication/326903856_A_simulation_study_of_Texas_hold%27em_poker_what_Taylor_Swift_understands_and_James_Bond_doesn%27t

2. GamblingSites. (23. August 2021). *Gambling Sites.org*. Preuzeto 28. kolovoz 2021 iz https://www.gamblingsites.org/poker/texas-holdem/history/

3. PokerHarder. (2021). *PokerHarder.com*. Preuzeto 9. rujan 2021 iz https://www.pokerharder.com/hr/savladajte-poker/pravila/holdem-pravila/

4. Skup autora, P. S. (2021). *PokerStrategy.com*. Preuzeto 7. rujan 2021 iz https://www.pokerstrategy.com/strategy/various-poker/texas-holdem-probabilities/

5. Sweeney, J. (2021). *RedChipPoker*. Preuzeto 9. rujan 2021 iz https://redchippoker.com/poker-exploits-playbook/

6. UpswingPoker. (2021). *Upswing Poker*. Preuzeto 9. rujan 2021 iz https://upswingpoker.com/poker-rules/blinds-antes-button/

## POPIS SLIKA:



## POPIS TABLICA:



## POPIS GRAFOVA: